# Kann ein flächendeckender Ausbau der Windkraft zur Glättung der Einspeisung führen?

Dr. - Ing. Detlef Ahlborn

15. Oktober 2015

**Zusammenfassung**

In zahllosen Studien wird behauptet, ein flächendeckender Ausbau der Windenergie führe zu einer Glättung der Einspeisung. Dieser Glättung der zufälligen Leistung aus Windkraftanlagen stehen fundamentale Zusammenhänge der mathematischen Statistik entgegen. In diesem Artikel wird nachgewiesen, dass das Gegenteil richtig ist: Ein Ausbau der Windenergie in Deutschland führt zu einer Vergrößerung der zufälligen Leistungs-Ausschläge im Netz. Es wird mit statistischen Methoden gezeigt, dass entsprechende Thesen von Wissenschaftlern und einschlägig bekannten Instituten nicht nur unhaltbar sondern erwiesenermaßen falsch sind. Der Artikel wendet sich an Fachleute mit Vorkenntnissen der mathematischen Statistik aber auch an interessierte Laien, die harte Beweise gegen kühne Behauptungen stellen wollen.

Einleitend kann man sich der vorliegenden Fragestellung zunächst mit einem Gedankenexperiment nähern:

Betrachtet man 2 identische Windkraftanlagen innerhalb einer Gruppe von räumlich benachbarten Windrädern, kann angenommen werden, dass die Windverhältnisse an beiden Standorten im Wesentlichen identisch sind. Wenn ein Windrad eine hohe Leistung einspeist, ist das auch beim benachbarten Windrad der Fall. Wenn die momentane Leistung der einen Windkraftanlage bekannt ist, kann also unmittelbar auf die Leistung der anderen geschlossen werden, d. h. die beiden Einspeisungen sind korreliert und damit nicht statistisch unabhängig.

Denkt man sich nun die gleichen Windräder in den Pyrenäen und am Ural aufgestellt, so werden die Windgeschwindigkeiten an diesen beiden Standorten zu einem gegebenen Zeitpunkt nur selten übereinstimmen. Die eingepeisten Leistungen werden daher fast immer verschieden voneinander sein, mit der Folge, dass nun nicht mehr von der Leistung des einen auf die Leistung des anderen Windrads geschlossen werden kann. Die Einspeisungen können als unkorreliert angesehen werden. Sie sind statistisch unabhängig voneinander.

Die zeitabhängige Leistungs-Einspeisung beider Anlagen soll nun mit $P_1(t)$ und $P_2(t)$ bezeichnet werden. Die Summenleistung $P(t)$ ist dann

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) \tag{1}$$

Beide Einspeisungen sind zufällig. Die Schwankungsbreite von zufälligen Größen wird in der Statistik durch Standardabweichung und Varianz beschrieben. Üblicherweise wird die Standardabweichung mit $\sigma$ und die Varianz mit $\sigma^2$ bzw. $var\,\langle\rangle$bezeichnet. Per Definition ist die Varianz das Quadrat der Standardabweichung. Für die Varianz der Summe von 2 zufälligen Größen gilt nun[1]

$$var\langle P\rangle = var\langle P_1 + P_2\rangle \tag{2}$$

Nach einschlägigen Regeln ergibt sich daraus

$$var\langle P_1 + P_2\rangle = var\langle P_1\rangle + var\langle P_2\rangle + 2\ cov\langle P_1, P_2\rangle\,. \tag{3}$$

Wenn die beiden Einspeisungen statistisch unabhängig sind, verschwindet der Kovarianz-Term, so daß sich diese Beziehung zu

$$var\langle P_1 + P_2\rangle = var\langle P_1\rangle + var\langle P_2\rangle \tag{4}$$

vereinfacht. Dieser Zusammenhang ist als Formel von Bienaymé bekannt. Damit ist nachgewiesen, dass die Varianz der Summeneinspeisung bei statistisch unabhängigen Einspeisungen größer ist, als die Varianz einer einzelnen Einspeisung, schließlich ist

$$var\langle P_1 + P_2\rangle \geq var\langle P_1\rangle\,. \tag{5}$$

Bei statistisch unabhängigen Einspeisungen wächst die Varianz der Summe also durch zusätzliche Einspeisungen ($P_2(t)$) an. Damit ist die Glättungshypothese allerdings noch nicht vollständig widerlegt, weil eine Korrelation der Einspeisungen noch einen negativen Kovarianz-Term in Gleichung (3) bewirken könnte. Dieser Fall soll nun betrachtet werden: Eine Korrelation der Einspeisung $P_2$ mit der Einspeisung $P_1$ rechtfertigt den (linearen) Ansatz

$$P_2 = \alpha P_1 + \beta \tag{6}$$

mit den beiden Korrelationskoeffizienten $\alpha$ und $\beta$. Setzt man diesen Zusammenhang in Gleichung (3) ein, so ergibt sich

$$var\langle P_1 + P_2\rangle = var\langle P_1\rangle + var\langle \alpha P_1 + \beta\rangle + 2\ cov\langle P_1, \alpha P_1 + \beta\rangle\,. \tag{7}$$

In einer Untersuchung von ARBACH et. al. [1] wird auf S. 18 festgestellt, dass die Korrelation zwischen unterschiedlichen Einspeisungen positiv ist. Insbesondere heißt es dort: *'Eine Antikorrelation zwischen Standorten ist nicht zu beobachten.'* Diese Aussage bedeutet, dass der eingeführte Korrelationskoeffizient $\alpha > 0$ ist. Nach einschlägigen Rechenregeln für die Varianz ergibt sich nun aus (9)

$$\begin{aligned} var\langle P_1 + P_2\rangle &= var\langle P_1\rangle + \alpha^2 var\langle P_1\rangle + 2\ \alpha\ var\langle P_1\rangle \\ &= (1 + 2\alpha + \alpha^2) var\langle P_1\rangle\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Für positive $\alpha$ ist also stets

$$var\langle P_1 + P_2\rangle \geq var\langle P_1\rangle\,. \tag{9}$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Varianz der Summeneinspeisung als Maß für die Volatiliät mit einem Zubau an Anlagen immer anwächst. Die Behauptung, ein Ausbau der Windkraft führe zu einer Glättung ist in Strenge widerlegt.

Im Fall der strengen Korrelation gilt offensichtlich

$$var\langle P(t)\rangle = (1 + \alpha)^2 var\langle P_1(t)\rangle\,. \tag{10}$$

Stehen zwei identische Anlagen gedanklich in unmittelbarer Nachbarschaft, (dann kann $\alpha = 1$ angenommen werden, weil die Leistungen beider Anlagen in jedem Augenblick im

[1] Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die Zeitabhängigkeit der Einspeisungen hier unterdrückt. Die Schreibweise $P$ steht also immer für die zeitabhängige Funktion $P(t)$

Wesentlichen gleich sind) so ist dann $var\,\langle P(t)\rangle = 4\,var\,\langle P_1(t)\rangle$. Die Varianz wird also mit der zusätzlichen zweiten Einspeisung um den Faktor 4 größer.
Im zweiten Fall sieht die Rechnung anders aus: Wenn zwei gleiche Anlagen statistisch nicht korreliert sind, sind die Schwankungen im Allgemeinen nicht identisch, weil die Windverhältnisse in großen Abständen nicht gleich sind. Jeder Anlage kann nunmehr eine eigene Varianz zugeordnet werden: $var\,\langle P_1(t)\rangle = \sigma_1^2$ bzw. $var\,\langle P_2(t)\rangle = \sigma_2^2$. Für die Varianz der Summeneinspeisung ergibt sich

$$var\,\langle P(t)\rangle = var\,\langle P_1(t)\rangle + var\,\langle P_2(t)\rangle = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \tag{11}$$

Die Varianz der Summeneinspeisung ist also um den Beitrag $\sigma_2^2$ größer als die der einzelnen Anlagen. Bei statistisch unabhängigen Einspeisungen ist diese Summenvarianz minimal, d. h. sie kann nicht kleiner werden.
Eines ist beiden Fällen gemeinsam: Egal, ob die Einspeisungen statistisch abhängig sind, oder nicht: Jede weitere Einspeisungen erhöht die Varianz. Die Schwankungsbreite der Leistungs-Einspeisung wird mit jeder weiteren Anlage größer, weil Varianz (und damit Standardabweichung) mit der Zahl der Anlagen immer anwachsen. Natürlich kann man diese Überlegung auf beliebige Zahlen von Windrädern verallgemeinern.

In [4] heißt es in diesem Zusammenhang *'Als Indikator für die Volatilität der Erzeugung lässt sich die Standardabweichung gegenüber einem räumlich hoch konzentrierten Ausbau deutlich verringern, wenn eine entsprechende räumliche Verteilung stattfindet.'* Diese Aussage trifft zunächst zu. Diese Argumentation folgt aus der obigen Betrachtung: Im oben behandelten ersten Fall beträgt die Standardabweichung $\sigma\,\langle P(t)\rangle = 2\,\sigma\,\langle P_1(t)\rangle$. Wenn Anlagen räumlich konzentriert sind, ist die Korrelation hoch. Bei identischen Anlagen kann man annehmen, dass die beiden Einspeisungen einander gleich sind. Wenn die Anlagen weit voneinander entfernt sind (und unkorreliert bzw. statistisch unabhängig sind), sinkt die Standardabweichung auf $\sigma\,\langle P(t)\rangle = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, sie ist also kleiner als im ersten Fall (korrelierte Einspeisung), aber größer als bei einer einzigen Anlage. In letzterem Fall beträgt die Standardabweichung nur $\sigma\,\langle P(t)\rangle = \sigma\,\langle P_1(t)\rangle = \sigma_1$.

Zusammengefasst: Die Standardabweichung von unkorrelierten Summanden (Einspeisungen) ist kleiner als bei korrelierten Summanden (Einspeisungen). Die Standardabweichung wächst aber immer mit der Anzahl der Summanden, bei korrelierten Summanden stärker als bei unkorrelierten Summanden.

Die Aussage, dass eine räumliche Verteilung zu einer Glättung führt, bleibt dennoch falsch, denn in beiden Fällen ist die Standardabweichung der Einspeisung aus 2 Anlagen größer als bei einer Anlage. Auf den Punkt gebracht:

Jede weitere zusätzliche Anlage erhöht Standardabweichung, Varianz und damit die Differenz zwischen maximaler und minimaler Einspeisung.

Der Ausbau der Windkraft in den westeuropäischen Ländern ist längst Realität und inzwischen stehen die eingespeisten Leistungen aus diesen Ländern im Internet zur Verfügung [2]. Die Stromproduktion der westeuropäischen Länder ist in Abbildung 1 dargestellt. Aufgrund Gleichung (9) ist die Addition der Leistung zu immer größeren Ausschlägen nicht anders zu erwarten. Die von den Verfassern der Studie [4] aufgestellte Behauptung *"Die anschließende Simulation der Erzeugung belegt, dass die Volatilität der Einspeisung, gemessen als Standardabweichung, signifikant reduziert werden kann, wenn die installierte Leistung gleichmäßiger über Deutschland verteilt ist."* grenzt bei dieser Beweislage an Betrug, weil der Eindruck erweckt wird, ein Ausbau führe zu einer Reduzierung der Standardabweichung. Diese Aussage ist durch den vorgetragenen Beweis widerlegt.

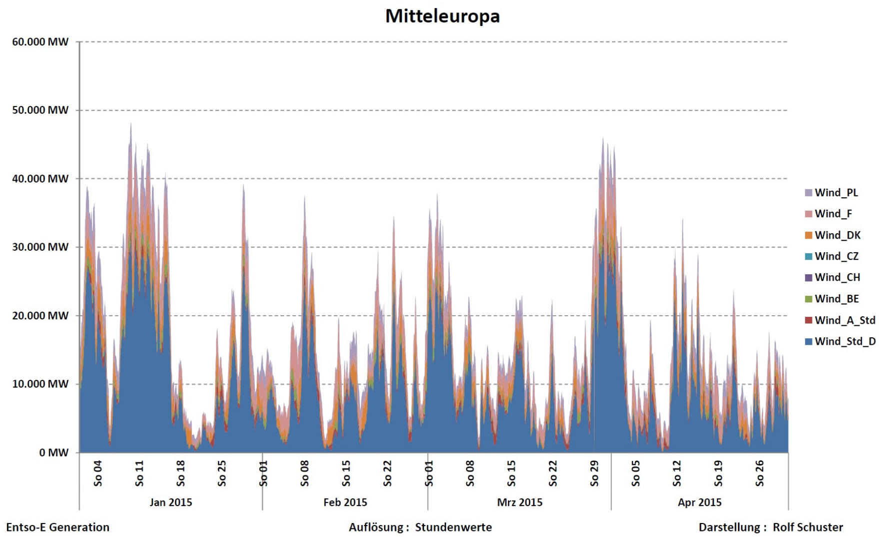


Abbildung 1: Addition der eingespeisten Windleistung in Westeuropa

Ebenso unhaltbar ist die von ARBACH et. al. in einer vom IWES in Kassel verfertigten Studie [1] aufgestellte Behauptung, ein Windkraftausbau in der Fläche würde die Geschwindigkeit des Leistungsanstiegs (man spricht hier vom Leistungsgradienten) reduzieren. Auch hier ist das Gegenteil richtig:

Betrachtet man die zufällige Summen-Einspeisung in regelmäßigen zeitlichen Abständen $\Delta t$ (z.B. $15 min$), so lassen sich zwei zeitlich aufeinander folgende Einspeisungen zu den Zeitpunkten $t_k$ und $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ schreiben als

$$\begin{aligned} P_k &= P(t_k) \\ P_{k+1} &= P(t_k + \Delta t) \end{aligned} \tag{12}$$

Der Zuwachs bzw. Abfall der Leistung $\Delta P_k$ während des Zeitintervalls $\Delta t$ ist unmittelbar gegeben durch die Differenz der Leistungen in den aufeinander folgenden Augenblicken:

$$\Delta P_k = P_{k+1} - P_k \tag{13}$$

Was zunächst so banal aussieht, hat weitreichende Konsequenzen. Für die Varianz der zeitlichen Änderung $\Delta P_k$ ergibt sich hier

$$\begin{aligned} var \langle \Delta P_k \rangle &= var \langle P_{k+1} - P_k \rangle \\ &= var \langle P_{k+1} \rangle + var \langle -P_k \rangle \\ &= var \langle P_{k+1} \rangle + var \langle P_k \rangle \\ &= 2 \; var \langle P_k \rangle \, . \end{aligned} \tag{14}$$

Die Varianz der zeitlichen Änderung in einem festen Zeitintervall hängt also mit der Varianz der Einspeisung selbst unmittelbar zusammen: Die Varianz der zeitlichen Änderung ist doppelt so groß wie die Varianz der Einspeisung selbst. Wie oben gezeigt, wächst die Varianz der Summen-Einspeisung immer mit dem Ausbau (mit der Zahl der dazu gebauten Windrädern) und aufgrund der vorstehenden Beziehung ist das auch für den zeitlichen Zuwachs (Leistungsgradienten) der Fall. Fasst man den Gradienten als Funktion der Zeit auf, so ist dessen Standardabweichung sogar um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als die Standardabweichung der Summen-Einspeisung, d. h. die Schwankungsbreite des

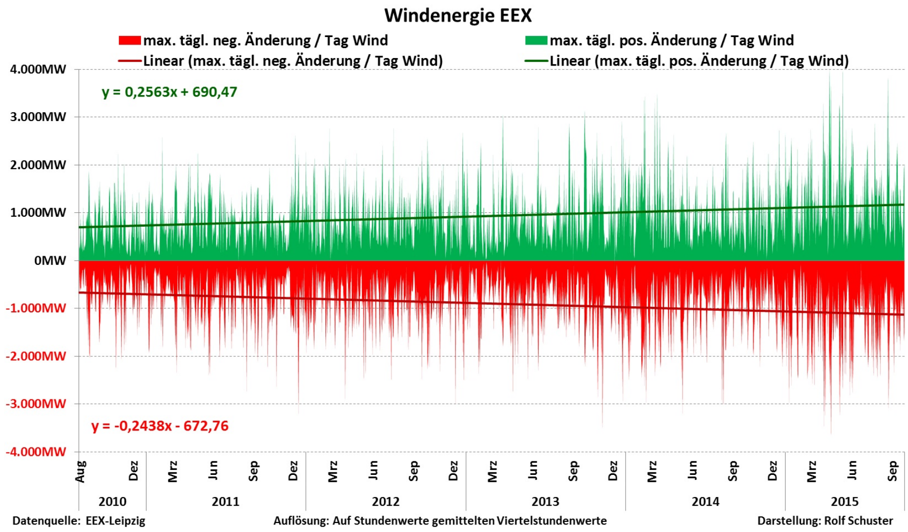


Abbildung 2: Größte tägliche Schwankungen der Einspeisung aus Windkraftanlagen in Deutschland

Leistungsgradienten ist größer als die der Einspeisung.

Im genannten IWES Report [1] heißt es etwa *'Es ist ersichtlich, dass die Gradienten dieser gesamten Einspeisung weit geringer sind sowie Minima und Maxima weniger extrem ausfallen als an den einzelnen Standorten'.* Auch hier bewegen sich die Verfasser, entsprechende Sach- und Fachkunde vorausgesetzt, nahe an einer Fälschung, weil der Eindruck erweckt wird, ein Ausbau in der Fläche führe zu geringeren Zuwächsen bzw. Leistungsgradienten obwohl das Gegenteil, wie oben gezeigt, erwiesen ist.
In Abbildung 2 sind die größten täglichen Schwankungen der Einspeisung aus Windkraftanlagen in Deutschland dargestellt. Der Anstieg der Schwankungen seit 2010 ist ganz offensichtlich. Die aufgestellte Behauptung einer Verringerung der Gradienten widerspricht ganz offensichtlich auch den vorliegenden Einspeisedaten.

Ein Ausbau der Windkraft in Deutschland bewirkt also

- eine Vergrößerung der Standardabweichung der Einspeisung und damit die Streubreite der Einspeisung,
- in der Folge eine Erhöhung der Leistungsspitzen und damit eine Verschärfung der Überschussstrom-Problematik
- eine Erhöhung der Änderungsgeschwindigkeiten der Leistung mit entsprechenden Folgen für die überwiegend konventionellen Kraftwerke, deren Steuerbarkeit schon heute an Grenzen stößt.

**Schlussbemerkung:** Die hier verwendeten Methoden der mathematischen Statistik gehören zu jeder Grundlagen-Vorlesung in Mathematik und sind in jedem Lehrbuch der Statistik zu finden.

# Literatur

[1] Arbach,S.; Gerlach, A.; Kühn, P.; Pfaffel, S.:
*AGORA Kurzstudie Entwicklung der Windenergie in Deutschland*
durchgeführt von Fraunhofer IWES, Kassel (2013)

[2] http://www.pfbach.dk/

[3] Fisz, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*
Deutscher Verlag der Wissenschaften; (1989)

[4] Mono, R.; Glasstetter,P.:
*Windpotenzial im räumlichen Vergleich*
Eine Untersuchung der 100 prozent erneuerbar stiftung
Berlin; (November 2012)