World of Mining – Surface & Underground 67 (2015) No. 4

Statistische Verteilungsfunktion der Leistung aus Windkraftanlagen

DETLEF AHLBORN, Germany

Im vorliegenden Artikel wird die Verteilungsfunktion der Windleistung einer Windkraftanlage aus der Weibull-Verteilung der Windgeschwindigkeit hergeleitet. Mit dieser Verteilungsfunktion wird ein statistisches Modell entwickelt, das die Verteilungsfunktion der Summenleistung aller Windkraftanlagen in Deutschland in brauchbarer Genauigkeit beschreibt. Mit diesem Modell wird auf die Standardabweichung der eingespeisten Windleistung geschlossen. Es wird untersucht, in welchem Umfang ein weiterer Ausbau der Windkraft die eingespeiste Leistung vergleichmäßigen kann.

1 Weibull-Verteilung der Windgeschwindigkeit

Infolge zufällig schwankender Windgeschwindigkeiten schwankt die von einer Windkraftanlage in Elektrizität gewandelte Leistung in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit zufällig. Dabei wirkt sich die Statistik der Windgeschwindigkeit in besonderer Weise auf die Zufälligkeit der erzeugten Leistung aus. Dieses Zusammenspiel soll hier untersucht werden.

Es ist üblich, zufällige Größen durch statistische Verteilungsfunktionen zu beschreiben. Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung ist die Gauß'sche Normalverteilung allgemein bekannt. Daneben gibt es in der Statistik noch eine ganze Reihe anderer Verteilungsfunktionen, wie etwa die Weibull-Verteilung, die auch die Häufigkeit der Windgeschwindigkeit beschreibt.

Diese Verteilungsfunktion $H_v(v)$ der zeitlich veränderlichen Windgeschwindigkeit kann durch die Weibull-Verteilung mit den Weibull-Parametern k und A beschrieben werden:

$$H_v\left(0 \le x \le v\right) = H_v\left(v\right) = 1 - e^{-\left(\frac{v}{A}\right)^k} \qquad (1)$$

Der Wert von $H_v(v)$ kann als die Zeit gedeutet werden, in der die Windgeschwindigkeit x zwischen den Werten 0 und v liegt. Die entsprechende Verteilungsdichte ergibt sich hieraus durch Differenziation zu

$$p_v\left(v\right) = \frac{k}{A}\left(\frac{v}{A}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{A}\right)^k} \qquad (2)$$

Das Histogramm dieser Verteilungsdichte ist in Abbildung 1 dargestellt.

Die Leistung einer Windkraftanlage ist nun bis zur Nennleistung proportional zur dritten Potenz der Windgeschwindigkeit und es soll nun die Frage untersucht werden, wie sich die Verteilungsfunktion der Windgeschwindigkeit auf die erzeugte Windleistung auswirkt. Diese Frage läuft darauf hinaus, die Verteilungsfunktion der Windleistung aus der Verteilungsfunktion der Windgeschwindigkeit

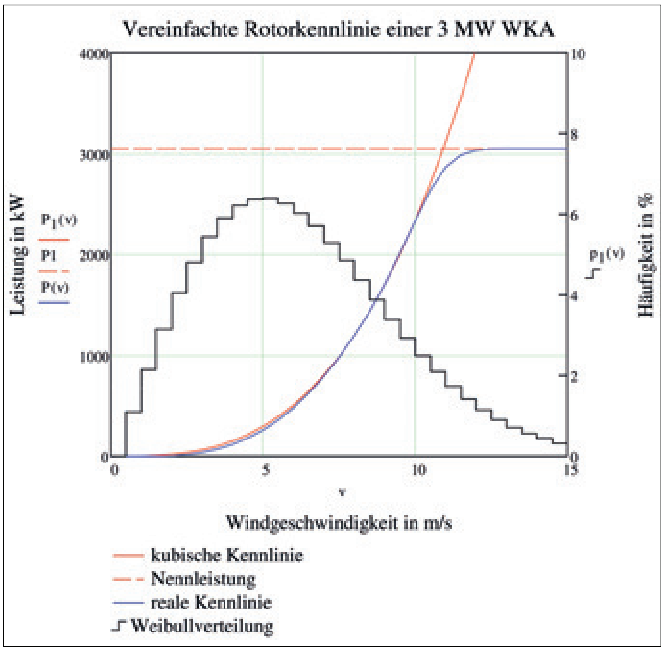

Abb. 1: *Rotorkennlinie einer Enercon E 101 für k = 2 und Histogramm Weibull-Verteilung*

zu ermitteln. Dieser Zusammenhang wurde für die Leistungsdichte des Windes bereits 1977 von Hennessey [4] untersucht.

2 Ermittlung der Verteilungsfunktion der Windleistung

Eine typische Rotorkennlinie ist in Abbildung 1 dargestellt: Bis zur Nennleistung steigt die Kennlinie proportional zur 3. Potenz der Windgeschwindigkeit an. Dadurch ist die Leistung gerade bei den häufig vorkommenden kleinen und mittleren Geschwindigkeiten klein.

Erst bei einer Windgeschwindigkeit von rund 11 m/s wird die Nennleistung erreicht. Weil Windgeschwindigkeiten in dieser Größenordnung eher selten sind, laufen Windräder fast ausnahmslos im Teillastbereich.

Für die folgende Herleitung soll hier zunächst vereinfachend angenommen werden, dass deren Leistung über den gesamten Windgeschwindigkeitsbereich streng proportional zur 3. Potenz der Windgeschwindigkeit ist.

Die Leistung eines Windrads hängt dann durch eine Beziehung der Form

$$P\left(v\right) = Cv^3 \qquad (3)$$

von der Windgeschwindigkeit v ab, wobei C eine durch die Bauart des Windrads bestimmte anlagenspezifische Konstante ist.

Fasst man nun diesen funktionalen Zusammenhang zwischen Windgeschwindigkeit und Leistung im Sinne von Szabo [5] als

Dr.-Ing. DETLEF AHLBORN,
Karl Ahlborn Maschinenfabrik KG, Vor dem Scheuerchen 17,
37247 Großalmerode, Germany
Tel. +49 (0) 5604-91958-0
info@karl-ahlborn.de

Transformation auf, so ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Windgeschwindigkeit und Leistung:

$$v(P) = \sqrt[3]{\frac{P}{C}} \tag{4}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (1) ein, so erhält man einen Ausdruck für die Verteilungsfunktion der Windleistung.

$$H_p(0 \le Z \le P) = H_p(P) = 1 - e^{-\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{P}{C}}}{A}\right)^k} \tag{5}$$

Wie die Zufälligkeit der Windgeschwindigkeit mit der Charakteristik des Windrads zusammenspielt, ist durch diese beiden Beziehungen vollständig beschrieben. Das statistische Verhalten der Windkraft-Stromproduktion liegt also a priori durch die Verteilungsfunktion der Windgeschwindigkeit und durch die kubische Kennlinie des Rotors fest. Wie nicht anders zu erwarten, hängt die Verteilungsfunktion der Windleistung von den Parametern der Weibull-Verteilung (gegeben durch A und k) und von der Bauart des Windrads (gegeben durch die Konstante C) ab.

Die Verteilungsfunktion $H_P(P)$ erlaubt nun die Ermittlung der Häufigkeit der Windleistung in folgendem Sinne: Der Wert von $H_P(P)$ ist ein Maß für die Zeitdauer, in der eine Windkraftanlage eine Leistung zwischen 0 und P liefert (Abbildung 2).

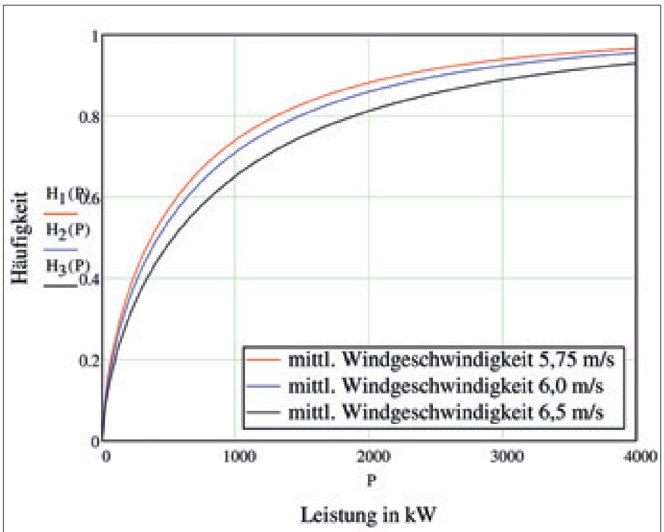

Abb. 2: *Verteilungsfunktion der Windleistung einer Enercon E 101 für k = 2*

Die mit $p_P(P)$ bezeichnete Verteilungsdichte wird nach einschlägigen Regeln aus der gefundenen Verteilungsfunktion in Gleichung (5) durch Differenziation ermittelt:

$$p_p(P) = \frac{dH_p(P)}{dP} = \frac{k}{3P}\left(\frac{P}{CA^2}\right)^{\frac{k}{3}} e^{-\left(\sqrt[3]{\frac{P}{CA^3}}\right)^k} \tag{6}$$

Diese Verteilungsdichtefunktion der Windleistung gehört damit auch zur Klasse der Weibull-Verteilungen. Mit dieser Beziehung kann die Häufigkeit der jeweils eingespeisten Leistung ermittelt werden. Bedingt durch den kubischen Zusammenhang zwischen Windgeschwindigkeit und Leistung sind niedrige Leistungen häufig und große Leistungen selten. Am wahrscheinlichsten ist die Leistung P = 0, also der Stillstand. Damit ist in Strenge bewiesen, dass Betriebszustände mit niedrigen Leistungen besonders häufig vorkommen und hohe Leistungen selten sind. Diese Aussage ist eine Folge der kubischen Abhängigkeit der Leistung von der Windgeschwindigkeit und der Weibull-Verteilung der Windgeschwindigkeit. Sie kann in folgendem Sinne verallgemeinert werden: Immer wenn niedrige und hohe Windgeschwindigkeiten weniger häufig als mittlere Windgeschwindigkeiten sind, und das ist praktisch ohne Ausnahme überall im Binnenland der Fall, sind niedrige Leistungen häufig und hohe Leistungen selten. In Abbildung 3 ist die Verteilungsdichte eines Windrads mit einer Nennleistung von 3030 kW und einer Nenngeschwindigkeit von 10,9 m/s entsprechend einem Wert C = 2,34 kWs³/m³ dargestellt.

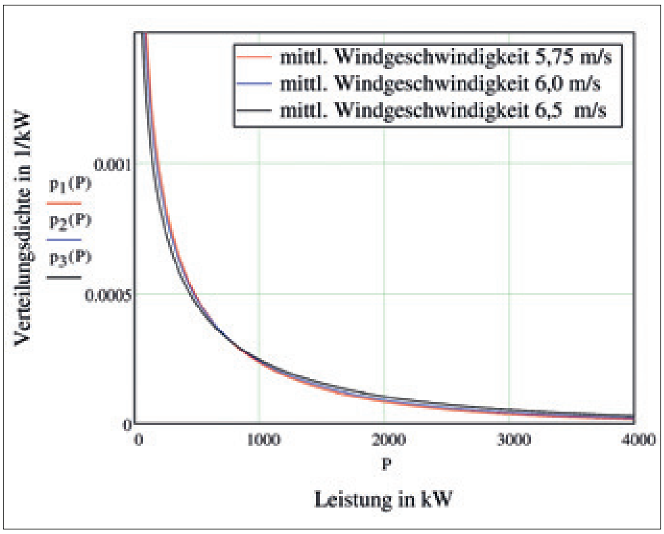

Abb. 3: *Verteilungsdichte der Windleistung für k = 2*

Die im statistischen Mittel zur Verfügung stehende Leistung kann nun durch den Erwartungswert, die mittlere Schwankung der Leistung durch die Standardabweichung bzw. Varianz beschrieben werden.

Nach bekannten Regeln ergibt sich der Erwartungswert der Verteilung durch die bekannte Beziehung

$$E_P = E\langle P\rangle = \int_0^\infty xp(x)dx \tag{7}$$

und die Varianz zu

$$\sigma_P^2 = \sigma^2\langle P\rangle = \int_0^\infty (x - E_P)^2 p(x)dx \tag{8}$$

Die mittlere Leistung des Windrads und die Schwankungsbreite der Leistung liegen also durch die Verteilungsdichtefunktion fest. Beide Kenngrößen hängen von den Weibull-Parametern A, k und von der Anlagenkonstante C ab. Eine genauere Analyse zeigt jedoch, dass der Quotient aus Varianz und quadratischem Erwartungswert unabhängig von den Konstanten C und A ist. Dieser Quotient hängt nur vom Weibull-Parameter k und nicht von A und C ab. Man kann also nachweisen, dass

$$\frac{\sigma_P^2}{E_P^2} = \varphi(k) \Rightarrow \sigma_P = \sqrt{\varphi(k)}E_P \tag{9}$$

ist.

Bei jedem einzelnen Windrad steigt die Varianz also in Abhängigkeit von k proportional zum quadratischen Erwartungswert an, d.h. die Standardabweichung der eingespeisten Leistung und die mittlere Leistung eines Windrads stehen in einem festen von k abhängigen proportionalen Verhältnis. Die Standardabweichung der Leistungsschwankungen wächst damit proportional zur durchschnittlichen Leistung und damit auch zur Nennleistung. Hier handelt es sich um eine weitreichende Aussage, weil man so die Varianz bzw. Standardabweichung der Einspeisung aus der durchschnittlichen Leistung unmittelbar ermitteln kann, wenn nur der Parameter k der Weibull-Verteilung bekannt ist. Dieses Verhältnis ist allein durch den Standort des Windrads festgelegt: An jedem Standort ist die Standardabweichung der Leistungsschwankungen proportional zur mittleren Leistung.

Aufgrund der besonderen Struktur der Verteilungsdichte ist die Standardabweichung für typische Werte von k immer größer als der Erwartungswert, d.h. die Spannbreite der Leistungsschwankungen ist größer als der Mittelwert selbst (Tabelle 1).

Tab. 1: Typische Werte von φ(k) und $\frac{\sigma_p}{E_p}$

k	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
φ(k)	5.00	3.32	2.40	1.83	1.46
$\frac{\sigma_p}{E_p}$	2.24	1.82	1.55	1.35	1.21

Diese Eigenschaft der Windstrom-Produktion folgt unmittelbar aus der Verteilungsdichtefunktion der Windleistung. Wäre die Leistung, wie etwa beim einfachen Würfelwurf, gleichverteilt, dann wäre $\sigma_P = \frac{E_p}{\sqrt{3}} = 0.577E_P$, d.h. die Schwankungsbreite der Leistung eines Windrads liegt bei typischen k-Werten um den Faktor 2.7 über der Schwankungsbreite der Augenzahl beim Würfeln. Für eine gleichmäßige Stromerzeugung könnte die Charakteristik eines Kraftwerks kaum ungünstiger sein.

Die getroffenen Aussagen und Zahlenwerte in Tabelle 1 sind insofern Näherungen, als die Leistung oberhalb der Nennleistung nicht mehr gemäß der kubischen Gleichung (3) weiter ansteigt. Oberhalb der windradspezifischen Nenn-Windgeschwindigkeit bleibt die Leistung unabhängig von der Windgeschwindigkeit konstant, da sie durch die Leistung des Generators begrenzt ist.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich eine Verteilungsfunktion, die im Punkt des Übergangs von der kubischen Parabel in den konstanten Zweig der Kennlinie unstetig ist. Oberhalb der Nenngeschwindigkeit hat die Verteilungsfunktion den Wert 1 (Abbildung 4). Wegen dieses Sprungs weicht die tatsächliche Verteilungsdichte von Gl. (6) ab. Die Sprungstelle kann beim Differenzieren durch die Einführung einer Dirac-Deltafunktion berücksichtigt werden. Bezeichnet man die Höhe des Sprungs in Abbildung 4 mit ΔH, so ergibt sich die entsprechende Verteilungsdichte des realen Windrads zu

$$p_P(P)\begin{cases} = \frac{k}{3P}\left(\frac{P}{CA^3}\right)^{\frac{k}{3}} e^{-\left(\sqrt[3]{\frac{P}{CA^3}}\right)^k} + \Delta H\delta\left(P-P_n\right) \text{ für } P \le P_n \\ = 0 \text{ sonst} \end{cases} \qquad (10)$$

Die Verteilungsfunktion für ein 3-MW-Windrad ist in Abbildung 4 für Weibull-Parameter k = 2 dargestellt. Die angegebenen Werte in Tabelle 2 lassen sich wie folgt interpretieren: An 73 Tagen im Jahr liegt die Leistung unter 76 kW, entsprechend 2,5 % der Nennleistung. Eine Leistung oberhalb von 1476 kW wird an 73 Tagen im Jahr erreicht.

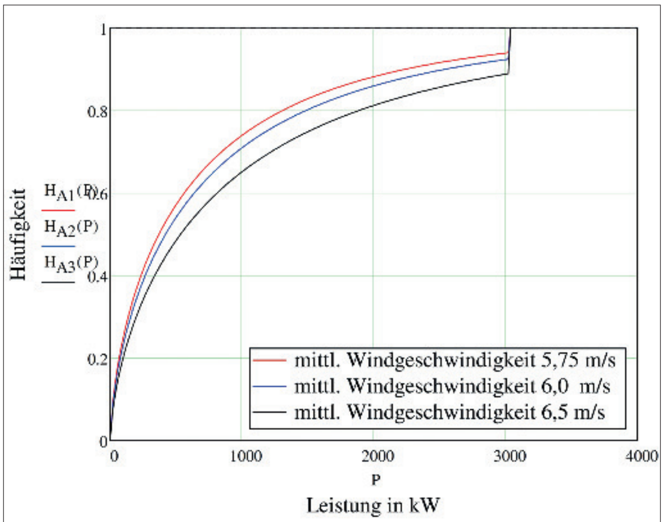

Abb. 4: Verteilungsfunktion der Windleistung bei einer Enercon E 101 mit Leistungsbegrenzung bei 3050 kW

Tab. 2: Häufigkeiten verschiedener Leistungen eines 3-MW-Windrads bei einer mittleren Windgeschwindigkeit von $\bar{v} = 6$ m/s

Häufigkeit [%]	Dauer [d/a]	Maximale Leistung [kW]	Leistung [% der Nennleistung]
20	73	76	2,5
20	146	265	8,7
60	219	635	20,8
80	292	1476	48,4
90	328	2536	83,1

3 Summeneinspeisung

Wenn eine große Zahl von Windkraftanlagen parallel in ein Netz einspeisen, entsteht daraus eine Summe aus zufälligen Leistungen, wobei die Verteilungsdichte jeder einzelnen Einspeisung durch eine Gleichung der Form (6) zumindest näherungsweise beschrieben wird. Die Summenleistung aus N Anlagen zu einem gegebenen Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$P_s(t) = \sum_{n=1}^{N} P_n(t) \qquad (11)$$

Die Verteilungsdichten der einzelnen Einspeisungen unterscheiden sich lediglich in den standort- und anlagenspezifischen Parametern k, A und C.

Es soll nun untersucht werden, in welcher Weise sich die Schwankungen der Leistungen einzelner Windräder gegenseitig ausgleichen können und ob es möglich ist, in einem großflächigen Verbund eine sichere Leistung zur Verfügung zu stellen. Diese Problemstellung läuft im statistischen Sinne darauf hinaus, die Verteilungsfunktionen und im Gefolge die Schwankungen (Standardabweichungen) und Mittelwerte (Erwartungswerte) der Summenleistung zu ermitteln.

Die Zahl der Summanden ist zunächst durch die Anzahl der Anlagen bestimmt. Auf welche Art und Weise aus der statistischen Verteilung der einzelnen Einspeisungen auf die Verteilung der Summen-Einspeisung geschlossen werden kann, soll im Folgenden untersucht werden.

Wenn eine Summe aus einer großen Anzahl zufälliger Zahlen gebildet wird, sichert der Zentrale Grenzwertsatz der mathematischen Statistik unter bestimmten Bedingungen, dass diese Summe asymptotisch normalverteilt ist [3], d.h. bei einer großen Zahl an Summanden nähert sich die Verteilungsfunktion der Summe einer Normalverteilung an. Wenn der Erwartungswert der einzelnen Summanden von Null verschieden ist, lässt sich zeigen, dass der Erwartungswert der Summe mit der Zahl an Summanden schneller wächst als die Standardabweichung [3]. Diese Tatsache ist auch in Tabelle 3 erkennbar. Insofern sichert der Zentrale Grenzwertsatz, dass die Summeneinspeisung aus Windkraftanlagen theoretisch grundlastfähig sein muss! Der entscheidende Faktor für diese Annäherung ist die Anzahl der Summanden.

Die Bedingungen für die Annäherung an eine Normalverteilung sind zunächst:

1. Alle Summanden sind voneinander statistisch unabhängig.
2. Alle Summanden haben die gleiche Verteilungsfunktion und gleiche Standardabweichungen bzw. Erwartungswerte.

Die zweite Bedingung ist bei der zufälligen Einspeisung von Windkraftanlagen nicht erfüllt, da sich die einzelnen Verteilungsdichtefunktionen in den charakteristischen Parametern unterscheiden.

Durch die sogenannte Ljapunow-Bedingung kann der zentrale Grenzwertsatz auf Zufallsgrößen verallgemeinert werden, deren Verteilungsfunktionen, Varianzen und Standardabweichungen verschieden voneinander sind.

Beim derzeitigen Ausbau der Windkraft in Deutschland wird die Einspeisung von rund 24 900 Windkraftanlagen addiert. Die Zahl

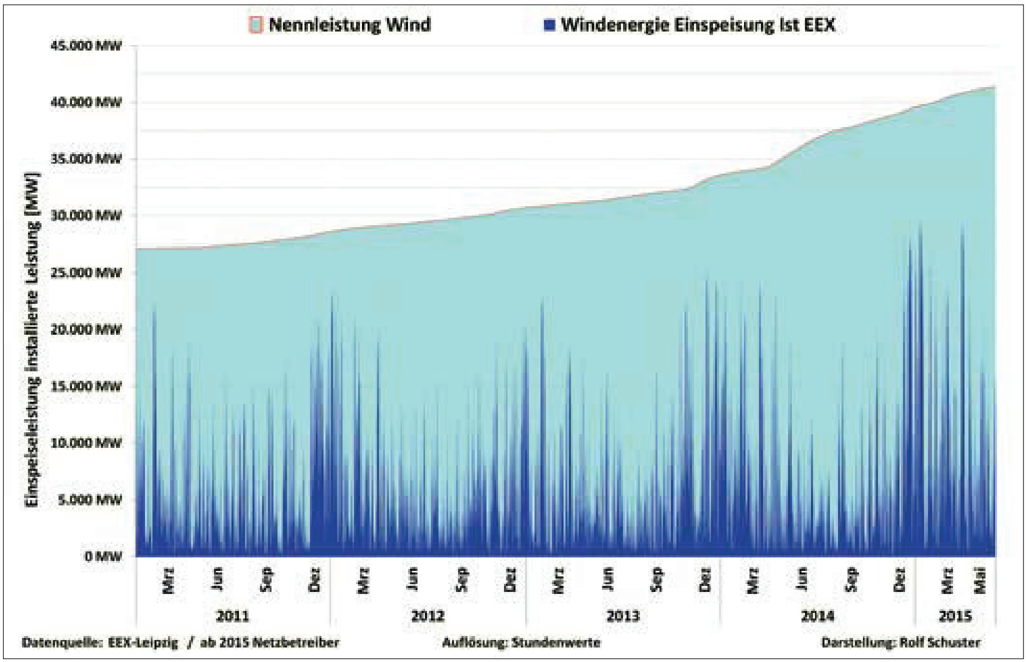

Abb. 5: Einspeiseverlauf der Summen-Windleistung in 2014

der Summanden ist also unter statistischen Gesichtspunkten sehr groß. Der Zeitverlauf der Einspeisung zwischen 2011 und 2015 ist in Abbildung 5 dargestellt. Die entsprechenden Histogramme und Verteilungen werden etwa in [1] ausführlich diskutiert. Aufgrund der großen Zahl von Einspeisungen müsste also die eingespeiste Leistung normalverteilt sein. Das Histogramm in Abbildung 7 lässt jedoch zweifelsfrei erkennen, dass die tatsächliche Windleistung nicht normalverteilt ist. Ganz offensichtlich erfüllen die einzelnen Summanden der Summenleistung in Gleichung (11) die Bedingungen des Zentralen Grenzwertsatzes nicht. Auch beim derzeitigen Ausbau sind im Verbund nach wie vor niedrige Leistungen besonders häufig und große Leistungen selten. Diese Tatsache wurde bereits 1999 von Czisch [2] beschrieben und dort auf die ausgeprägte Korrelation des Wettergeschehens zurückgeführt. Der seitdem betriebene Ausbau der Windenergie in Deutschland hat daran offensichtlich nichts geändert. Die Verteilungsdichte der Summeneinspeisung scheint sich nicht wesentlich von der eines einzelnen Windrads zu unterscheiden. Die statistische Struktur dieser Addition soll nun betrachtet und mathematisch begründet werden.

4 Verteilungsfunktion der Summeneinspeisung

Bei der Addition der zufälligen Einspeisung aus einzelnen Windrädern tritt die Frage auf, wie aus der Verteilungsfunktion der Summanden in Gleichung (11) auf die Verteilungsfunktion der gebildeten Summe geschlossen werden kann. Entscheidende Bedeutung hat dabei die Frage, ob die einzelnen Summanden in einer Abhängigkeit voneinander stehen, oder ob sie statistisch unabhängig sind.

Die grundsätzlichen Zusammenhänge sind z.B. in [3] dargestellt und sollen hier dennoch zum besseren Verständnis erläutert werden: Wenn etwa zwei Einspeisungen x und y mit unterschiedlichen Verteilungsdichtefunktionen durch Addition zu einer Summeneinspeisung „gemischt“ werden, wird die Summe weder der einen noch der anderen Verteilung folgen, schließlich entsteht durch die „Mischung“ eine neue, andere Verteilungsfunktion. Der Zusammenhang zur Ermittlung dieser neuen Verteilungsfunktion aus den Verteilungsfunktionen der Summanden wird durch einschlägige Regeln der Statistik geliefert: Dazu muss zunächst die sogenannte charakteristische Funktion einer Verteilung $p_x(P)$ eingeführt werden. Sie ist definiert durch den Erwartungswert von e^{itx}:

$$\varphi_x(it) = E\langle e^{itx}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_P(x)\,dx \qquad (12)$$

Formal ist $\varphi_x(it)$ die Fouriertransformierte der Verteilungsdichtefunktion. Betrachtet man nun eine Zufallsgröße z = x + y, die aus den statistisch unabhängigen Zufallsgrößen x und y mit bekannten charakteristischen Funktionen $\varphi_x(it)$ und $\varphi_y(it)$ als Summe gebildet wird, dann gilt für die charakteristische Funktion der Verteilungsdichte von z:

$$\varphi_z(it) = \varphi_x(it)\varphi_y(it) \qquad (13)$$

Hierin ist die ermittelte charakteristische Funktion $\varphi_z(it)$ die Fouriertransformierte der unbekannten Verteilungsdichtefunktion $p_z(P)$ der Zufallsvariablen z. Sie ist also das Produkt der charakteristischen Funktionen der einzelnen Einspeisungen. Nach einschlägigen Regeln für die Fouriertransformation kann dann die Verteilungsdichte $p_z(P)$ durch die Fourier-Rücktransformierte der charakteristischen Funktion $\varphi_z(it)$ ermittelt werden:

$$p_z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_z(it)e^{-izt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(it)\varphi_y(it)e^{-izt}dt \qquad (14)$$

Wenn die Einspeisungen untereinander korreliert sind, gilt diese Gleichung in dieser Form nicht. Diese Aussage ist der Schlüssel zum Verständnis der statistischen Verteilung der Summenwindleistung in Deutschland, schließlich ist die Verteilungsfunktion für ein einzelnes Windrad gemäß Gleichung (6) bekannt. Die Verteilungsdichte der Summe aus mehreren statistisch unabhängigen Einspeisungen kann also durch folgende Schritte ermittelt werden:

1. Ermittlung der charakteristischen Funktionen der einzelnen Verteilungsdichten gemäß Gleichung (12),
2. Berechnung des Produkts der charakteristischen Funktionen der Summeneinspeisung anhand Gleichung (13),
3. Ermittlung der Verteilungsdichte der Summeneinspeisung mit der Fourier- Rücktransformierten.

Damit steht nun eine Methode zur Verfügung, die Verteilungsdichte- und letztlich die Verteilungsfunktionen der summarischen Leistung aus mehreren statistisch unabhängigen Windkraft-Einspeisungen zu ermitteln und daraus eine Vorhersage abzuleiten, wie die Verteilung der Summenleistung aussehen müsste. Zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird die Summenleistung P immer auf den Erwartungswert E_P eines einzelnen Windrads mit einer Verteilungsdichte gemäß Gl. (6) bezogen. Legt man für die unabhängigen Einspeisungen jeweils die gleichen Verteilungsdichten zugrunde, beträgt der Erwartungswert für die

Leistungen dann aufgrund des Additionssatzes für Erwartungswerte bei zwei Einspeisungen $2E_P$, bei drei Einspeisungen $3E_P$. Dieser Zusammenhang ist evident, schließlich haben zwei Windräder unter ähnlichen statistischen Bedingungen die doppelte durchschnittliche Leistung.

Nicht ganz so trivial liegen die Dinge bei der Betrachtung der Leistungsschwankungen: Wenn die einzelnen Summand x und y statistisch unabhängig sind, ergibt sich die Varianz der Summe als Summe der Varianzen, d.h. es gilt

$$var\langle x+y\rangle = var\langle x\rangle + var\langle y\rangle \qquad (15)$$

Folglich beträgt die Varianz für zwei Einspeisungen dann $2\sigma^2$, bei drei Einspeisungen $3\sigma^2$ usw.

Mit jeder statistisch unabhängigen Einspeisung wächst also die Varianz an. Da die Varianz gemäß Gleichung (9) proportional zum Quadrat des Erwartungswerts ist, erfolgt dieses Wachstum in strenger Abhängigkeit vom Erwartungswert: Weil der Erwartungswert mit der Anzahl an Anlagen anwächst, wächst folglich auch die Varianz. Da die Varianz ein Maß für die Leistungsschwankungen ist, erweist sich die weit verbreitete Behauptung, ein Ausbau der Erzeugungskapazitäten führe zu einer Glättung der Einspeisung, daher als unzutreffend. Eine Erhöhung der Erzeugungskapazitäten führt immer zum Anwachsen der Varianz und damit der Streuung. Deren Anstieg zwischen 2011 und 2014 ist in Abbildung 5 unmittelbar erkennbar.

Eine Glättung der Einspeisung durch Zubau von Anlagen steht damit nicht nur im Widerspruch zu den bekannten Verläufen der Einspeisung, sondern auch zu fundamentalen Zusammenhängen der Statistik.

Das Histogramm in Abbildung 6 lässt zunächst erkennen, dass die Summenleistung auch bei fünf statistisch unabhängigen Einspeisungen nicht normalverteilt ist. Mit drei, vier bzw. fünf Einspeisungen ist die Zahl der statistisch unabhängigen Summanden zu klein, um zu einer Normalverteilung zu führen. Mit steigender Zahl unabhängiger Einspeisungen werden zwar kleine Leistungen unwahrscheinlicher, ein gegenseitiger Ausgleich zu einer sicher zur Verfügung stehen Leistung findet jedoch nicht statt. Anhand der Verteilungsfunktion können nun die Unterschreitungs-Wahrscheinlichkeiten für eine bestimmte Leistung abgeschätzt werden.

In Tabelle 3 sind die Unterschreitungs-Wahrscheinlichkeiten von 5 % des Erwartungswerts der Summenleistung angegeben. Offensichtlich wird dieser 5-%-Wert (bei einer Anlagenverfügbarkeit von 20 % bedeutet dieser 5-%-Wert, dass weniger als 1 % der Nennleistung zur Verfügung steht) auch bei fünf statistisch unabhängigen Einspeisungen für eine Dauer von 8 h im Jahr unterschritten, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Summenleistung auf sehr kleine Werte abfällt, ist keine vernachlässigbar

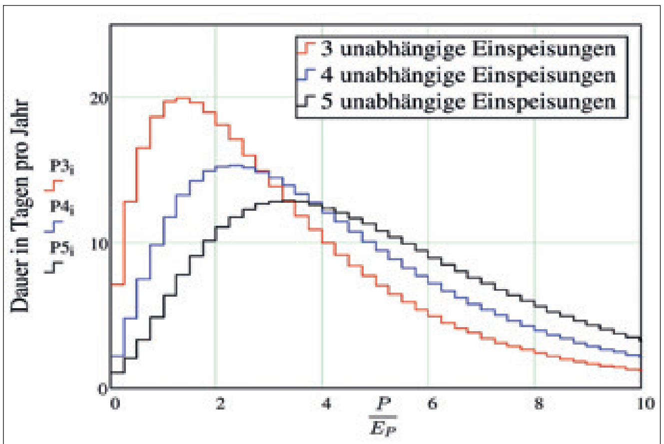

Abb. 6: Verteilungsdichte und Verteilungsfunktion für drei, vier und fünf statistisch unabhängige Einspeisungen gemäß Gl. (6)

Tab. 3: Wahrscheinlichkeiten von Leistungen unter 5 % des Erwartungswerts für Einspeisungen aus Windkraftanlagen mit P_n = 3050 kW, $\bar{v}$ = 6 m/s und k = 2

Anzahl Einspeisungen	Erwartungswert	5-%-Wert	Häufigkeit [%]	Dauer [h/a]	Standardabweichung
2	2 E_P	0,10 E_P	3,52	297	2,19 E_P
3	3 E_P	0,15 E_P	0,94	82	2,68 E_P
4	4 E_P	0,20 E_P	0,27	25	3,10 E_P
5	5 E_P	0,25 E_P	0,09	8	3,46 E_P

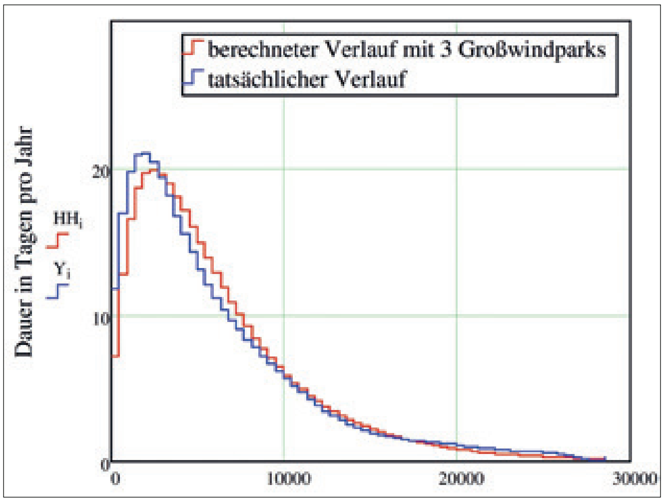

Abb. 7: Vergleich der Histogramme der Windleistung in Deutschland mit einer Einspeisung aus drei statistisch unabhängigen Quellen mit einer Verteilungsdichte gemäß Gl. (6)

kleine Größe mehr. Mithin ist die Summenleistung aus einer kleinen Zahl von statistisch unabhängigen Einspeisungen prinzipiell nicht grundlastfähig. Diese Aussage folgt aus der Struktur der Verteilungsdichte in Gleichung (6) und der Verteilungsfunktion der Summenleistung in Gleichung (14).

Mit den Verteilungsdichten aus Gleichung (6) wurde das Produkt für drei charakteristische Funktionen bzw. Verteilungsdichten mit einem komplexen FFT-Algorithmus ausgeführt. Die durch Rücktransformation (inverse FFT) ermittelte Verteilungsdichte aus drei statistisch unabhängigen Einspeisungen ist in Abbildung 7 dargestellt. Offensichtlich verhalten sich alle rund 24 900 Windkraftanlagen in Deutschland in etwa so, als gäbe es nur drei statistisch unabhängige Einspeisungen.

Daraus ergibt sich der Schluss, dass selbst die sehr große Zahl an Windkraftanlagen in Deutschland nicht statistisch unabhängig, sondern vielmehr untereinander korreliert und damit statistisch abhängig voneinander sind. Diese Aussage ist natürlich zu erwarten, weil die Großwetterlagen in Deutschland meist zur Folge haben, dass hohe und niedrige Windstärken und damit hohe und niedrige Leistungen fast immer in der gesamten Fläche gleichzeitig auftreten. Alle 24 900 Windräder verhalten sich in der Summe ungefähr so, als wären sie durch 24 897 Gleichungen miteinander verknüpft. Die gesamte Windstromerzeugung in Deutschland enthält nur drei statistische Freiheitsgrade.

Aufgrund dieser statistischen Abhängigkeit ergänzen sich die rund 24 900 Windkraftanlagen in Deutschland nicht: Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt nachgewiesen, sind Summenleistungen mit einer geringen Zahl unabhängiger Einspeisungen nicht grundlastfähig. Deren sicher zur Verfügung stehende Summenleistung beträgt P = 0. Dieser praktische Ausfall der Leistung aus Windenergieanlagen ist im Jahr 2014 am 17. Juli eingetreten, als die Leistung auf 0,6 Promille der installierten Nennleistung gefallen ist. Überdies kann mit den Histogrammen in Abbildung 6 schon heute abgeschätzt werden, wie sich diese Verteilungen bei einem weiteren Zubau entwickeln können. Dabei steht fest: Die Fläche von Deutschland reicht nicht aus, um mit Windkraftanlagen eine gesicherte Grundlast bereitzustellen, weil nicht erwartet werden kann, dass sich die Anzahl der statistischen Freiheitsgrade durch einen Zubau wesentlich erhöhen wird.

Ein weiterer Ausbau der Windkraft im deutschen Alleingang ohne verfügbare Speichertechnik erhöht mit der Standardabweichung allein die Leistungsschwankungen ohne eine gesicherte Leistung zur Verfügung zu stellen und wird daher die heute schon bekannten technischen und ökonomischen Probleme weiter verschärfen. Besonderes Augenmerk muss dabei den anwachsenden Leistungsschwankungen geschenkt werden, weil die Laständerungsgeschwindigkeiten (Gradienten) dadurch steigen. Zudem werden die Leistungsspitzen weiter anwachsen und zu mehr überschüssiger Leistung führen. Da eine großtechnische Realisierung von Speichertechniken in weiter Ferne liegt, ist eine sichere Versorgung des Stromnetzes mit elektrischer Leistung nur durch konventionelle Kraftwerkstechnik möglich. Die beschlossene Abschaltung der Kernkraftwerke erzwingt daher den Bau neuer Kraftwerke. Allein die Gesetze der Physik und die Sätze und Regeln der Statistik stehen dem Wunsch entgegen, Deutschland könnte der Welt mit der Energiewende ein Vorbild sein. So wie sie in Deutschland betrieben wird, widerspricht sie fundamentalen Zusammenhängen der mathematischen Statistik. Daran ist die Energiewende schon heute gescheitert.

5 Zusammenfassung

Die Häufigkeitsverteilung der von Windrädern bereitgestellten elektrischen Leistung ergibt sich mathematisch allein aus der Weibull-Verteilung der Windgeschwindigkeit und der kubischen Kennlinie des Windradrotors.

Dadurch liegt die Standardabweichung als Maß für die Leistungsschwankungen a priori fest. Aus der Verteilungsfunktion einzelner Windräder konnte die Verteilungsfunktion der Summenleistung für eine kleine Anzahl an Einspeisungen hergeleitet werden. Die ausgeprägte Korrelation der Leistung aus Windkraftanlagen konnte dadurch nachgewiesen werden, dass sich die deutsche Windstromproduktion auf einige wenige statistische Freiheitsgrade reduzieren lässt. Dabei liegt die sicher zur Verfügung stehende Leistung bei Null. Der weitere Zubau an Windkraftanlagen erhöht lediglich die Leistungsschwankungen.

Literatur

[1] Ahlborn, D. (2014): Statistik und Verfügbarkeit von Wind- und Solarenergie. – In: Niederhausen, H., Burkert, A.: Elektrischer Strom; Springer-Vieweg Verlag; Wiesbaden: 691-700.

[2] Czisch, G.M., Durstewitz, M., Hoppe-Kilpper, M. & Kleinkauf, W. (1999): Windenergie gestern, heute und morgen. – In: Husum Wind 99, Kongressband, Husum; Wellmann und Klein Unternehmensberatung GbR.

[3] Fisz, M. (1989): Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. – Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[4] Hennesey, J. P. (1977): Some Aspects of Wind Power Statistics. – Journal of Applied Meteorology, **16** (2): 119-128.

[5] Sauer, R. & Szabo, I. (Hrsg.) (1970): Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. – Springer Verlag; Berlin, Heidelberg, New York.